世界を三角関数で表現する

学習院大学理学部数学科・中村周

2019 年 8 月 3 日・オープンキャンパス模擬講義・サマリー

1 「すべての関数」と三角関数

関数：「関数」と言っても、いろいろな関数がある。1 次関数、二次関数、指数関数、分数関数、対数関数、三角関数、など...。今回は、区間 $[0,1]$ の上の関数を考える。つまり、関数 f とは、

$x \in [0,1]$ に対して $f(x)$ を対応させる「写像」（対応）

と考える。

周期的な関数：実数全体で定義された関数 $f(x)$ が（周期 1 で）「周期的」であるとは、

$$f(x+1) = f(x)$$

がすべての x について成り立つこと。このとき、すべての整数 n、すべての実数 x について、

$$f(x+n) = f(x)$$

であることは、帰納法を用いて簡単に示せる。区間 $[0,1]$ 上の関数は、上の公式を用いて、周期的な関数と考えても良い（ただし、$f(0) = f(1)$ とする）。

三角関数： $\sin(2\pi x), \cos(2\pi x)$ は周期的な関数。n を整数とすると、

$$\sin(n \times 2\pi x) = \sin(2\pi n x), \quad \cos(n \times 2\pi x) = \cos(2\pi n x)$$

も周期的な関数。

フーリエ (1768–1830) のアイデア：「すべての」周期的な関数 $f(x)$ は、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(2\pi x) + a_2 \cos(4\pi x) + a_3 \cos(6\pi x) + \cdots \\ &\qquad + b_1 \sin(2\pi x) + b_2 \sin(4\pi x) + b_3 \sin(6\pi x) + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x) \end{aligned}$$

と表せる。ここで、$a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ は定数。これを、「フーリエ級数展開」、$a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ を「フーリエ係数」と呼ぶ。

2　関数のフーリエ級数展開

関数 f が与えられたとき、フーリエ級数展開：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi nx)$$

は可能なのか、またフーリエ係数はどうやって計算できるか？フーリエ係数は（比較的）簡単に計算できる。なぜなら、すべての 0 でない整数 n について、

$$\int_0^1 \sin(2\pi nx)dx = \int_0^1 \cos(2\pi nx)dx = 0$$

であることに注意する[1]。上の式に代入して、

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^1 \cos(2\pi nx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^1 \sin(2\pi nx) = \frac{a_0}{2}.$$

つまり $a_0 = 2\int_0^1 f(x)dx$. 三角関数の積和公式を用いて、同様に、n, m が整数のとき

$$\int_0^1 \cos(2\pi mx)\cos(2\pi nx)dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1/2 & (n = m) \end{cases}$$

$$\int_0^1 \sin(2\pi mx)\sin(2\pi nx)dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1/2 & (n = m) \end{cases}$$

$$\int_0^1 \cos(2\pi mx)\sin(2\pi nx)dx = 0$$

が証明できる。これを用いて $n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(2\pi nx)dx, \quad b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(2\pi nx)dx$$

と計算できる。

定理： $f(x)$ が周期関数として「連続よりもう少し強い条件」を満たせば、すべての x で

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(2\pi nx) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(2\pi nx)\right\}$$

が成り立つ。

[1]例えば

$$\int_0^1 \sin(2\pi nx)dx = \left[-\frac{\cos(2\pi nx)}{2\pi n}\right]_0^1 = -\frac{\cos(2\pi n)}{2\pi n} + \frac{\cos(0)}{2\pi n} = 0$$

3　ベクトル空間の考え方と関数の作るベクトル空間

線型空間としての関数の集合：「線形代数」では、平面、３次元空間などを一般化した、「線型空間」を学ぶ。「関数の空間」も、線型空間である。つまり、

- f, g が関数なら、$f+g$ も関数。
- f が関数で a が定数なら、af も関数。
- f, g が関数で a, b が定数なら、

$$a(f+g) = af + ag, \quad (a+b)f = af + bf, \quad a(bf) = (ab)f, \quad 1f = f$$

内積：さらに、$[0,1]$ 上の関数 f, g の「内積」を

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

で定めると、平面、３次元空間の内積のような性質：

$$(f, g+h) = (f, g) + (f, h), \quad (f, g) = (g, f), \quad (af, g) = a(f, g)$$

を持っている。さらに、関数の「長さ」を

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left(\int_0^1 f(x)^2 dx\right)^{1/2}$$

で定めることができる。

直交するベクトルの集まりとしての三角関数：フーリエ係数の計算で出てきた三角関数の積分の公式は、この内積を用いると、

$$\big(\cos(2\pi mx), \cos(2\pi nx)\big) = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1/2 & (n = m) \end{cases}$$
$$\big(\sin(2\pi mx), \sin(2\pi nx)\big) = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1/2 & (n = m) \end{cases}$$
$$\big(\cos(2\pi mx), \sin(2\pi nx)\big) = 0$$

と書き換えられる。これは、$\sin(2\pi nx), \cos(2\pi nx)$ が互いに直交していて、長さが $1/\sqrt{2}$ であることを意味している。つまり、

> フーリエ級数展開は、関数の線型空間における、基底
>
> $$\{1, \sqrt{2}\sin(2\pi nx), \sqrt{2}\cos(2\pi nx) : n = 1, 2, \dots\}$$
>
> による、座標表現である

ということが分かる。このように、関数の集合の性質を、線型空間の幾何学として考えて解析する研究分野を、「関数解析」(functional analysis) と呼ぶ。

4　関数解析、量子力学、信号処理、…

4.1　関数解析

ここで述べてきた考え方は、一般に「無限次元空間の幾何学」としての関数解析学に拡張される。（ヒルベルト空間論、バナッハ空間論、位相線型空間論、超関数の理論 … ）

物理、化学、生物などの自然現象の基礎理論の多くは、偏微分方程式で記述されるが、関数解析学は現代的な偏微分方程式論の基礎である。

4.2　量子力学

関数解析的な考え方の、最も成功した応用例が量子力学の数学的基礎付け (J. von Neumann)。量子力学は、微視的な世界の物理学の基礎であるが、関数解析を用いないで記述することは難しい。実際、ヒルベルト空間の抽象理論は、von Neumann によって、量子力学の基礎付けのために導入された。現在でも、数学的な研究が盛んな分野である。

4.3　信号処理

音声信号、画像などのデータは、直線、あるいは平面の（部分集合の）上の関数として表現される。これらの解析、処理において、フーリエ級数展開、関数解析学はとても役に立つ、基礎的な道具となっている。この分野は、工学の分野では、「信号処理」(signal processing) と呼ばれる。

- 音声信号においては、フーリエ解析は「周波数領域での解析」に対応している。
- 画像処理で、２次元のフーリエ級数展開は、ウェブで用いられる画像圧縮、動画圧縮、つまり、JPEG, MPEG 圧縮、（あるいは MP4, H264）などに用いられる。
- さらにフーリエ解析の延長、精密化として、「超局所解析」(microlocal analysis)、「時間-周波数解析」(time-frequency analysis)、ウェーブレット解析などがある。