やっぱり方程式が好き

中野 伸

学習院大学・理学部・数学科

2017 年 7 月 29 日

2 次方程式の解の公式

2 次方程式

$$X^2 + bX + c = 0$$

の解は，

$$\frac{-b+R}{2}, \quad \frac{-b-R}{2}$$

ただし，R は

$$b^2 - 4c$$

の平方根のひとつとする．

3 次方程式の解の公式

3 次方程式

$$X^3 + bX^2 + cX + d = 0$$

の解は，

$$\frac{-b+R+S}{3}, \qquad \frac{-b+z^2R+zS}{3}, \qquad \frac{-b+zR+z^2S}{3}$$

ただし，R, S は，Y に関する 2 次方程式

$$Y^2 + (2b^3 - 9bc + 27d)Y + (b^2 - 3c)^3 = 0$$

の 2 解それぞれの 3 乗根 R, S で，$RS = b^2 - 3c$ を満たすようにとるとする．

また，$z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$（1 の原始 3 乗根という）とする．

4 次方程式の解の公式

4 次方程式

$$X^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e = 0$$

の解は，

$$\frac{-b+R+S+T}{4}, \quad \frac{-b+R-S-T}{4},$$
$$\frac{-b-R+S-T}{4}, \quad \frac{-b-R-S+T}{4}$$

ただし，R, S, T は，Y に関する 3 次方程式

$$Y^3 - (3b^2 - 8c)Y^2 + (3b^4 - 16b^2c + 16c^2 + 16bd - 64e)Y - (-b^3 + 4bc - 8d)^2 = 0$$

の 3 解それぞれの平方根 R, S, T で，$RST = -b^3 + 4bc - 8d$ をみたすようにとるとする．

方程式

$$X^2 + bX + c = 0$$

解の公式の導き方【その１】 — ふつうの方法

- もし，x が解ならば，

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$$

$$x + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

導き方【その 2】 — ふつうじゃない方法

- 一般に α, β について

$$2\alpha = (\alpha+\beta) + (\alpha-\beta), \quad 2\beta = (\alpha+\beta) - (\alpha-\beta)$$

一方，

$$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$$

なので

$$2\alpha \ \text{または}\ 2\beta = (\alpha+\beta) \pm \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$$

とくに，α, β が解ならば，解と係数の関係

$$\alpha+\beta = -b, \quad \alpha\beta = c$$

を使えば，

$$\therefore \quad \alpha \ \text{または}\ \beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4c}}{2}$$

3 次方程式 — 公式の導き方

- 3 次方程式

$$X^3 + bX^2 + cX + d = 0$$

について考える．

- 2 次方程式をまねて第 1 の方法 (ふつうの方法) でやってみると，すぐに行き詰まってしまう… とほほ…．

- そこで，第 2 の方法 (ふつうじゃない方法) を試みる．
まず，2 次の場合の関係式; 2 つの解 α, β に対して

$$\begin{cases} Q = \alpha + \beta \\ R = \alpha - \beta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2\alpha = Q + R \\ 2\beta = Q - R \end{cases}$$

…これに対応する関係式って何だろう………

- すっごく掘り下げる…と，

$$(-1)^2 = 1, \quad -1+1=0$$

が「理由」のような気がする…，そこで，3 次の場合には

$$z^3 = 1, \quad z^2+z+1=0$$

のような数を考えてみる— 複素数の中には確かにある！ $z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$．

- z を使えば，3 つの解 α, β, γ に対して

$$\begin{cases} Q = \alpha+\beta+\gamma \\ R = \alpha+z\beta+z^2\gamma \\ S = \alpha+z^2\beta+z\gamma \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3\alpha = Q+R+S \\ 3\beta = Q+z^2R+zS \\ 3\gamma = Q+zR+z^2S \end{cases}$$

解と係数の関係 — 3 次方程式の場合

- Q, R, S をどのように求めたらいいか？（a, b, c を使ってどう表すか？）

  解と係数の関係 $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-b \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=c \\ \alpha\beta\gamma=-d \end{cases}$ に着目する．

- まず，すぐにわかるのは

$$Q=-b$$

- あとは，R, S が計算できればいいんだけど……，
  2 次の場合は，$(\alpha-\beta)^2=R^2$ を計算してみたらうまくいった．
  それをまねて，3 次の場合も R^3, S^3 を計算してみる……と，

  なかなか大変だ……そこで Maple に助けてもらおう．

Q, R, S の計算 — なんとかなりそう

- R^3, S^3 それぞれの計算には z が残ってしまったが，$R^3 + S^3$ に z は現れない;

$$
\begin{aligned}
R^3 + S^3 =& 2(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) \\
&- 3(\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2) \\
&+ 12\alpha\beta\gamma
\end{aligned}
$$

- さらに，解と係数の関係を用いれば，

$$R^3 + S^3 = -2b^3 + 9bc - 27d$$

- 同じような計算によって

$$RS = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha + \beta + \gamma) = b^2 - 3c$$

- R^3, S^3 は，2 次方程式

$$Y^2 - (-2b^3 + 9bc - 27d)Y + (b^2 - 3c)^3 = 0$$

の解 $\quad\rightarrow\quad$ この解の 3 乗根が R, S である．

- どうして $R^3 + S^3$ や RS は，係数 b, c, d の式で書けたの？
- キーワードは，解の置き換え
- 2 次方程式の場合，$X^2 + bX + c = 0$ の解 α, β について，$(\alpha - \beta)^2$ の値は，α, β の置き換えによって変わらない．
- そこで一般に，

(A)

2 次方程式 $X^2 + bX + c = 0$ の解 α, β の式が，係数 b, c で表されるわけは，その式が α, β の置き換えによって変わらないからだ

と受けとめてしまおう．

3 つの解の置き換え — たくさんある

- **3 次方程式** $X^3 + bX^2 + cX + d = 0$ **の 3 つの解** α, β, γ **の置き換えは 6 通り**;

e	$(\alpha\ \beta)$	$(\alpha\ \gamma)$	$(\beta\ \gamma)$	$(\alpha\ \beta\ \gamma)$	$(\alpha\ \gamma\ \beta)$
$\alpha \to \alpha$	$\alpha \to \beta$	$\alpha \to \gamma$	$\alpha \to \alpha$	$\alpha \to \beta$	$\alpha \to \gamma$
$\beta \to \beta$	$\beta \to \alpha$	$\beta \to \beta$	$\beta \to \gamma$	$\beta \to \gamma$	$\beta \to \alpha$
$\gamma \to \gamma$	$\gamma \to \gamma$	$\gamma \to \alpha$	$\gamma \to \beta$	$\gamma \to \alpha$	$\gamma \to \beta$

- **解と係数の関係の左辺**;

$$\alpha + \beta + \gamma, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \qquad \alpha\beta\gamma$$

は，どの置き換えでも変わらない．

Q, R, S は，解の置き換えでどう変化する？

- $Q = \alpha + \beta + \gamma, \quad R = \alpha + z\beta + z^2\gamma, \quad S = \alpha + z^2\beta + z\gamma$ は，6 つの置き換えでどう変化するか？
- Q はどの置き換えでも変わらない．
- R, S の変化を根気強く計算してみた（ついでに RS や R^3 等も）．

置換	R	S	RS	R^3	S^3	$R^3 + S^3$
e	R	S	RS	R^3	S^3	$R^3 + S^3$
$(\alpha\ \beta)$	zS	z^2R	RS	S^3	R^3	$R^3 + S^3$
$(\alpha\ \gamma)$	z^2S	zR	RS	S^3	R^3	$R^3 + S^3$
$(\beta\ \gamma)$	S	R	RS	S^3	R^3	$R^3 + S^3$
$(\alpha\ \beta\ \gamma)$	z^2R	zS	RS	R^3	S^3	$R^3 + S^3$
$(\alpha\ \gamma\ \beta)$	zR	z^2S	RS	R^3	S^3	$R^3 + S^3$

- $R^3 + S^3$，RS は，どの置き換えでも変わらない．

解の置き換えで不変なものは係数で書ける

- (A) と同様に、3 次の場合にも

(B) 3 次方程式 $X^3 + bX^2 + cX + d = 0$ の解 α, β, γ の式が，係数 b, c, d で表されるわけは，その式が α, β, γ のすべての置き換えによって変わらないからだ

としよう．

- Q, $R^3 + S^3$, RS は（α, β, γ の式として）どの置き換えでも変わらないので，(B) より，b, c, d で表されるはず．
- 実際に，上で紹介したように

$$Q = -b, \quad R^3 + S^3 = -2b^3 + 9bc - 27d, \quad RS = b^2 - 3c$$

と表されたのであった．

めでたし，めでたし

- と，言いたいところだがっ，

＼(｀0´)／ ちょっと待った〜

上に書いた (A) と (B) って，ホントにいいのかよ，正しいこと言ってんのかよ？と，お疑いの貴方，あなたには数学のセンスがあるかもしれない． 実は，(A)，(B) が成り立つことこそ，近代的な方程式論の中心にある「ガロア理論」の本質的な部分なのだ． そんでもって，これらの性質を方程式の対称性というのだ． 大雑把に言えば，方程式の解というものは，ひとつひとつを峻別することはできない，上手にまとまって対称性をもてば係数の式で表される，ということなんだけど，詳しいことは，数学科の 3 年生くらいになったら「代数」の授業で勉強することになるので，お楽しみに．

おしまい