役に立つ数学、楽しい数学

理学部数学科　・　中島匠一

2015年 10月 30日（金）

数学を学ぶ理由

＝ 役に立つ

or

＝ 楽しい・面白い

この講演の対象者

数学が「役に立つ」とも「楽しい」とも思ってない人

扱うテーマ

日常生活に出てくる事象

必要な知識

人間としての「常識」

＋

あたりまえの「論理」

＋

中学・高校の数学

$\boxed{\text{問題1}}$

記号は図1参照

高さを与える式

$$h = \frac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha} \times \ell$$

（参考）

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

３角形の性質

定理：対応する3辺の長さが等しい2つの3角形は合同である

$$AB = A'B',$$

$$BC = B'C',$$

$$CA = C'A'$$

$$\Longrightarrow$$

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

応用：筋交い

参照

対応する４辺の長さが
等しい４角形は・・・
合同とは・・・
限らない

$\boxed{\text{問題2}}$

答え＝26回

求めるべきもの

$$2^n > 37756300$$

をみたす最小のn

計算法

（い）　2倍の計算を続ける

（ろ）　対数を利用する

（は）　暗算：ただし

$$2^{10} = 1024$$

を利用する

問題３

答え

（１）　元金の減少を無視

（２）　年利27.3198・・・ ％

（３）　（Ⅰ）元利均等返済：

毎年、約23.85万円

返済総額

＝約238.5万円

(II) **元金均等返済：**

1**年目**：30**万円**

2**年目**：28**万円**

・・・

10**年目**：12**万円**

返済総額＝210**万円**

必要な数学

等差数列の和の公式

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$$

等比数列の和の公式

$$\sum_{n=1}^{N} x^{n-1} = \frac{1-x^N}{1-x}$$

社会生活の必須知識

貨幣の２つの価値

（Ⅰ）　額面

（Ⅱ）　購買力

時間経過があると

＝＞

「違い」が発生！

（I）　額面：変化しない

（II）　購買力：変化する

年利rの世界

すべての「お金」に

年利率$= r$

が適用される世界

この世界では

今のx円　$=$

1年後の$x(1+r)$円

これを繰り返して、

n年後を考えると

今のx円　＝

n年後の$x(1+r)^n$ 円

以上のプロセスを
「逆転」させる
＝＞
貨幣の「現在価値」

n年後のy 円 ＝

今の$\dfrac{y}{(1+r)^n}$ 円

元利均等返済の公式

M ：借りる金額

N ：返済年数

r ：年利率

m ：毎年の返済額

公式

$$m = \frac{Mr}{(1 - (1 + r)^{-N})}$$

$\boxed{\text{問題４}}$

答え

（１）**マグニチュード**９.０**はマグニチュード**７.０**の**１０００**倍のエネルギー**

（２）６.２５**グラム**

$\boxed{\text{問題５}}$

答え

（１）御心（みこころ）のままにお答えいただきましょう

（２）損得の境目＝250円

ゲームの分析

コインの出方	賞金の額	確率	賞金 × 確率
表	100 円	1/2	50 円
裏・表	200 円	1/4	50 円
裏・裏・表	400 円	1/8	50 円
裏・裏・裏・表	800 円	1/16	50 円
裏・裏・裏・裏・表	1600 円	1/32	50 円
裏・裏・裏・裏・裏	0 円	1/32	0 円

ゲームの期待値＝

50円 ＋ 50円 ＋ 50円 ＋ 50円 ＋ 50円

＝250円

問題６

答え

（1）　宝くじを買い占める

（2）　資金の約半分を失う

（3）　当たりっこない、と感じる（あくまでも個人的感想です）

この問題のポイント(Ⅰ)

宝くじは、約半分が「経費」

したがって、

300円の宝くじの賞金の期待値

＝約150円

この問題のポイント(II)

自分の買ったくじの番号に関わらず、
当選する確率は同じ！

教訓

宝くじの「発行枚数」を調べるべし

問題7

答え

(1)一案を提示する

（あ）　データを実数aで表す

（い）　平面上に、傾きがaの直線Lを選ぶ

（う）　L上の3点P, Q, Rを選ぶ

（え）　P、Q、Rの座標を保管する

答え

（2）多くの方法あり；例示する

（I）　放物線を利用

（II）　平面上の円を利用

数学的考察

（1）では直線

•••１次式

（2）(I)では放物線

•••２次式

＝＞ 一般化可能

問題８

答え

支点（＝手の平）と棒の重心との間の距離の違いによる

この問題の数学的背景

線形微分方程式を利用した制御(Control)理論

登場する微分方程式

（状況は、図２参照）

g：重力加速度

m：棒の重さ

ℓ：支点と重心の距離

t：時間（t ＝ ０がスタート）

$\theta(t)$：棒の傾きの角度

$F(t)$：人間が加える力

「力学的釣り合い」から来る式

$$m\ell\theta''(t) = mg\sin\theta(t) - F(t)$$

ただし、$\theta''(t)$は$\theta(t)$の２階導関数

＝＞ 線形化

（ちょっと一休み）

高校生のためのページ

線形化のために必要な事柄

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

「主役」の微分方程式

$$m\ell\theta''(t) =$$
$$mg\theta(t) - F(t)$$

人間は何もしない

<=> $F(t) = 0$

このときの方程式

$$\ell\theta''(t) = g\theta(t)$$

最後の方程式の解

$$\lambda = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

とおくとき、解は

$$\theta(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t}$$

と表される

わかること

λが大きい

=>

$e^{\lambda t}$ が激しく増大

=>

棒がすぐ倒れる

また、

$$\lambda = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

であったから、

「gが一定」なら

λが大きい

＜＝＞ℓが小さい

＜＝＞棒が短い

となる

問題９

答え

すべての文字を３回ずつ繰り返して伝言する

たとえば「キ」という文字を伝えるなら、「キキキ」と伝言する

伝言された結果から、「多数決」をとれば、正しい文字がわかる

例:「キンキ」＝＞「キ」

「答え」の方法だと、通信量が3倍！
＝＞
効率が悪い

対策 ＝＞ 符号理論

誤り訂正符号(error correcting code)の理論

例：

ハミング(Hamming)符号

４ビットの情報を７ビットの通信量で送れる

問題10

計算結果の表

1倍	142857
2倍	285714
3倍	428571
4倍	571428
5倍	714285
6倍	857142

答え

「不思議」＝現れるのがすべて同じ数字で、しかも、並んでいる順番も変わらない

問題11

答え

（初級問題）

（1）　$17 \times 37 = 629$

（2）　$713 = 23 \times 31$

（中級問題）

（1）　$127 \times 137 = 17399$

（2）　$16241 = 109 \times 149$

この問題のポイント

　積の計算は易しいが、因数分解は難しい

　行きはヨイヨイ、帰りはコワイ

　＝＞ RSA 暗号

　＝＞ 公開鍵暗号

問題１２

答え「４で割ったときの余り」で決まる

（ちょっと寄り道）

数学豆知識

偶数である素数は2だけ！

２以外の素数を**奇素数**(odd prime)と呼ぶ

フェルマーの定理

素数を4で割ったときの余りをRとするとき

$R=3$

$=>$ 2平方和でない

$R=1$

$=>$ 必ず2平方和で表される

ラグランジュの定理

　自然数は必ず４つの平方数の和として表される。

　例：

$156 = 1^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2$

$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$